

平面曲線のタイプの研究

寺島 成紀*

On Numerical Types of Algebraic Plane Curves

Shigenori Terashima*

In this paper, Terashima studied algebraic plane curves from the viewpoint of birational geometry of pairs in which a surface S and a curve D are denoted together like (S, D) . The purpose of this paper is to investigate the relation between the pairs (\mathbb{P}^2, C) which satisfy Noether's counter inequality and the pairs (Σ_b, D) which are #minimal models. Moreover, Terashima lists the possible numerical types of plane curves on \mathbb{P}^2 which satisfy Noether's counter inequality and visualizes the relations of some pairs of invariants of the possible types.

1 \mathbb{P}^2 における双有理変換と曲線の次数

\mathbb{P}^2 内で曲線を双有理変換し、なるべく次数の小さい曲線にすることを考える. すなわち、 \mathbb{P}^2 内の曲線を双有理同値という関係で類別し、 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ でいえば $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ に相当するような、なるべく簡単な代表元をさがそうと試みる. 次の定理がある.

Theorem 1.1 (Max Noether)

すべての \mathbb{P}^2 内の双有理変換は 2 次変換の合成でかける.

これにより、 \mathbb{P}^2 内の双有理変換による次数の変化は 2 次変換について考察すればよい.

\mathbb{P}^2 における曲線 C の次数を d とし、 ν_0, ν_1, ν_2 を同一直線上にない 3 点 P_0, P_1, P_2 の C における重複度とする. これに P_0, P_1, P_2 を中心とする基本 2 次変換を施すと新たにできた曲線 C' の次数 d' は

$$d' = 2d - \nu_0 - \nu_1 - \nu_2$$

のようになる (Max Noether の 2 次変換則). ここで 3 点が同一直線上にあるときは 2 次変換ができないことに注意する. このとき $d < \nu_0 + \nu_1 + \nu_2$ と $d' < d$ は同値であるから、次の重要な Max Noether の不等式が出る.

* 東京工芸大学工学部基礎教育研究センター非常勤講師
2008 年 9 月 22 日 受理

2 Max Noether の不等式

Theorem 2.1 (Max Noether の 2 次変換則)

\mathbb{P}^2 内の次数 d の曲線 C に対し、 ν_i, ν_j, ν_k を同一直線上にない 3 点での C の重複度とする．その 3 点を中心とする 2 次変換を C に施してできた曲線 C' の次数 d' は、 $\nu_i + \nu_j + \nu_k > d$ なら d よりも下がる．(3 点は曲線上に無くてもよい。 P_i が C の上にない場合 $\nu_i = 0$ とする.)

ここでもしある曲線において重複度の大きい方から 3 点 P_0, P_1, P_2 をとり、上の不等式の逆 $\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 \leq d$ を満たせば、一般に 3 点 P_i, P_j, P_k をとったときにも、対応する重複度 ν_i, ν_j, ν_k は $\nu_i + \nu_j + \nu_k \leq d$ をみたす．したがってこれらを中心とする 2 次変換でも次数が下げることはいできない．そこで、曲線 C の特異点の最大重複度を順に ν_0, ν_1, ν_2 とし、 d を次数とすると $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leq d$ を Noether の逆不等式と呼ぶ．ここで特異点が無いときは $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 1$ 、特異点が 2 つのときは $\nu_2 = 1$ などとする．

ところがこの理論には欠陥がある．もし重複度の大きい 3 つの特異点が同一直線上に並んだ場合は、その 3 点を中心とする 2 次変換自体ができず Noether の逆不等式は本来の意味をもたなくなるからである．とはいえ、重複度の最も大きいほうから 3 点とったときに、それが同一直線上に並んでしまうことはきわめて稀なケースである．したがって \mathbb{P}^2 内で曲線を双有理変換で簡略化する試みは理論としては破綻しているが、研究の基礎としては十分有効な不等式であり、この不等式を考察することには意味があるものと思われる．

3 対の理論

\mathbb{P}^2 上の曲線に対する Max Noether の理論は不完全であるが、 Σ_b の曲線についての # 極小モデルの理論は理論として完成している． \mathbb{P}^2 では解決のつかない問題を Σ_b に移して考えると見通しが良くなることが多い．ここで Σ_b とは $b \geq 0$ で

$$\Sigma_b = \{((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1)) | x_1 y_1^b = x_2 y_2^b\} \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$$

によって定義される曲面であり、ヒルゼブルフ曲面とも呼ばれる． Σ_b の理論では、 \mathbb{P}^2 における 2 次変換に相当する I ~ III 種の基本変換によりパラメータ b が変わりうる． \mathbb{P}^2 の場合と違い、曲線の舞台である Σ_b の b も変化するのである．そこで曲面と曲線を対で考える必要が出てくる．

これに伴い双有理変換も対にして考える．すなわち

Definition 3.1 (対として双有理同値)

曲面 S, W に対して双有理変換 $h : S \rightarrow W$ があり、 S 上の曲線 D を変換 h によって写した W 上の図形 $h(D)$ から例外図形を無視してできた図形 $h[D]$ が W 上の曲線 C となっているとき、 $h : (S, D) \rightarrow (W, C)$ とかき、 h を (S, D) から (W, C) への対としての双有理変換とよぶ．また、このような変換 h が存在するとき (S, D) と (W, C) は対として双有理同値であるという．

Definition 3.2 (相対的に極小)

(S, D) を非特異な曲面 S と非特異な曲線 D の対とする． S 上のすべての第 1 種例外曲線 E が $E \neq D$ かつ $E \cdot D \geq 2$ を満たすとき、対 (S, D) は相対的に極小であるという．

条件 $E \cdot D \geq 2$ がみたされるとき、例外曲線 E をつづすと D には特異点が出てくる．すなわち、対として双有理同値な非特異対のつくる類において良い性質をもつ代表元として、相対的

に極小な対を考えることができる．また、対の理論では曲線のタイプと曲線がのっている曲面も表示する必要があるが、そのために次の線形同値についての定理を用いる．

Theorem 3.3

\mathbb{P}^2 上の曲線 C に対して、 d を曲線 C の次数、 L を直線としたとき、曲線 C は dL と線形同値である．

Theorem 3.4

Σ_b においてすべての曲線はある非負整数の対 (σ, e) があって $\sigma\Delta_\infty + eF_c$ と線形同値である．ここで F_c は曲面 Σ_b から射影直線 \mathbb{P}^1 への自然な射影を考えたときの 1 点 $c \in \mathbb{P}^1$ の逆像であり、ファイバーと呼ばれる．また、 Δ_∞ は切断曲線のうちの 1 つであり、 $\Delta_\infty^2 = -b \geq 0$ をみたす． Σ_b はファイバー F_c の束と考えられるが、切断曲線はファイバーの束を横断する曲線である．

以上、 \mathbb{P}^2 においては次数の d 、 Σ_b においては (σ, e) を用いて曲線のタイプを次のように表示する．

Definition 3.5 (\mathbb{P}^2 の曲線のタイプ)

\mathbb{P}^2 上の曲線 C の無限に近い特異点も含む特異点すべてを重複度順に並べ P_0, P_1, \dots, P_r とし、 P_0 の重複度を ν_0 、 P_1 の重複度を $\nu_1 \dots$ のようにあらわすとき、 \mathbb{P}^2 上の曲線 C のタイプは

$$[d; \nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$$

とする．

無限に近い特異点とは、曲線の非特異化までのブローアップの度に途中経過として例外曲線上に現れる特異点のことであり、そういう陰に隠れた特異点もあらかじめすべてリストアップしておく．

Definition 3.6 (Σ_b の曲線のタイプ)

Σ_b 内の曲線 C が $\sigma\Delta_\infty + eF_c$ と線形同値のとき、無限に近い特異点も含む特異点すべてを重複度順に並べ、添え字は 1 から始めて P_1, P_2, \dots, P_r とし、重複度を ν_1, ν_2, \dots のようにあらわす．このとき曲線 C のタイプは

$$[\sigma * e, b; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$$

とする．

\mathbb{P}^2 の場合は次数 d と特異点のリストのみで表示し、 Σ_b のときは次数に相当する (σ, e) と特異点のリストの他に、 Σ_b のパラメータ b もタイプの表示に載せる．

4 Σ_b における # 極小モデルの理論

Definition 4.1 (# 極小モデル)

Σ_b における曲線 C が $\sigma \geq 2\nu_1$ を満たし、さらに $b = 0, 1$ の場合についてそれぞれ、

(1) $b = 0$ のとき $e \geq \sigma$,

(2) $b = 1$ のとき $e - \sigma \geq \nu_1$,

(3) $b = 1$, $r = 0$ のとき $e - \sigma \geq 2$

を満たすとき、対 (Σ_b, C) を $\#$ 極小モデルと呼ぶ。

非特異の場合は $\sigma \geq 2$ になるので $\#$ 極小モデルが $\sigma = 1, 0$ となることはない。 Σ_b において曲線を簡易化していったときに非特異でかつ $\sigma = 1, 0$ にまでなってしまう場合は $\#$ 極小モデルにならないのである。そして $\#$ 極小モデルがなぜ重要かは次の 2 つの定理からわかる。

Theorem 4.2

曲面 S を有理曲面とし、 S 上の曲線 D は $\kappa[D] \geq 0$ のとき、すべての相対的に極小な対は、 $S = \mathbb{P}^2$ のときを除くと、ある $\#$ 極小モデルを最短非特異化することで得られる。

ここで $\kappa[D]$ とは因子次元 $\kappa(S, D + K_S)$ の略記であり、対 (S, D) の小平次元と呼ばれる双有理不変量である。双有理不変であるから (S, D) が (\mathbb{P}^2, L) と双有理同値ならば $\kappa[L] = \kappa(\mathbb{P}^2, L + (-3L)) = -\infty$ だから $\kappa[D] = \kappa[L] = -\infty$ である。また逆に $\kappa[D] = -\infty$ ならば (S, D) は (\mathbb{P}^2, L) と双有理同値であることが知られている (Coolidge)。

Theorem 4.3

$\#$ 極小モデルを最短非特異化すれば対として相対的に極小である。ただし、 $r = 0, e - \sigma = 1$ の場合を除く。

$\#$ 極小モデルのイメージは、 Σ_b における I ~ III 種の基本変換によって特異点の重複度と \mathbb{P}^2 において次数に相当する (σ, e) のうち、 σ に着目して可能な限り簡易化した状態である。上の定理はつまり、ヒルゼブルフ曲面において曲線が簡単になっていれば、非特異化すると相対的に極小なモデルに行き着くということである。

5 \mathbb{P}^2 におけるネーターの逆不等式と $\#$ 極小モデルの関係

冒頭の章で述べたように若干の問題点はあるが、曲線 C が \mathbb{P}^2 においてネーターの逆不等式をみたせば、射影変換と基本 2 次変換によって簡易化されたと思われる。曲線 C が \mathbb{P}^2 においてネーターの逆不等式をみたしたとき、対 (\mathbb{P}^2, C) が Σ_b における $\#$ 極小モデルに対応しているということであれば大変都合がよい。なぜなら定理 4.2 により、曲線 C が \mathbb{P}^2 においてネーターの逆不等式をみたせば対 (\mathbb{P}^2, C) の非特異化が相対的に極小になるからである。 \mathbb{P}^2 内の 1 点を中心に局所 2 次変換を行うと Σ_1 になるが、それによって C が変換されてできる曲線 C^* のタイプは次の定理でわかる。

Theorem 5.1

\mathbb{P}^2 内の曲線 C のタイプが $[d; \nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$ のとき、最大重複度の点 P_0 でブローアップして C を変換してできた曲線 C^* のタイプは $[(d - \nu_0) * d, 1; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$ になる。

次にこの (Σ_1, C^*) が $\#$ 極小モデルかどうかを調べよう。定義 4.1 によると、この場合 $b = 1$ であるから $e - \sigma \geq \nu_1$ も必要だが、これは $e - \sigma = d - (d - \nu_0) = \nu_0 \geq \nu_1$ なので成り立っている。問題は $\sigma \geq 2\nu_1$ の条件であるが、

$$\sigma \geq 2\nu_1 \Leftrightarrow d - \nu_0 \geq 2\nu_1 \Leftrightarrow d \geq \nu_0 + 2\nu_1.$$

$\nu_1 \geq \nu_2$ だから、 $d \geq \nu_0 + 2\nu_1$ はネーターの逆不等式 $d \geq \nu_0 + \nu_1 + \nu_2$ より厳しい条件である。たとえば \mathbb{P}^2 内の曲線 C のタイプが $[7; 3, 3, 1]$ のような場合、ネーターの逆不等式はみたすが

ローアップして Σ_1 にもってくるとタイプは $[4 * 7, 1; 3]$ となり $4 = \sigma < 2\nu_1 = 6$ なので #極小にはならないのである。

このように 1 度のブローアップで #極小にならないこともあるが、大局的観点からはネーターの逆不等式をみたす曲線 C による対 (\mathbb{P}^2, C) が Σ_b における #極小モデルに対応していると見てよい。それは次の定理があるからである。

Theorem 5.2

(S, D) を非特異な有理曲面 S と非特異な曲線 D の対とする。 (S, D) から (Σ_b, C) に双有理変換がありそれが正則写像であれば (Σ_b, C) と I ~ III 種の基本変換で移り合う対 $(\Sigma_{b'}, C')$ へも (S, D) から双有理正則写像が存在する。

実際、曲線 C が Noether の逆不等式 $d \geq \nu_0 + \nu_1 + \nu_2$ はみたすが $d \geq \nu_0 + 2\nu_1$ をみたさないと仮定すると、 P_1 を中心にした $I_{(-)}$ 種基本変換によって各不変量は、(一般の場合、すなわち P_1 が Δ_∞ にのっていないとして、)

$$b' = b - 1 = 0, \quad \sigma' = \sigma = d - \nu_0$$

$$e' = e - \nu_0 = d - \nu_0, \quad \nu'_1 = \sigma - \nu_1 = d - \nu_0 - \nu_1$$

のように変化する。ネーターの逆不等式 $d \geq \nu_0 + \nu_1 + \nu_2$ が仮定してあるから $\nu'_1 = d - \nu_0 - \nu_1 \geq \nu_2$ となり ν'_1 は引き続き最大重複度である。したがってこの変換によってできた曲線 Γ のタイプは、

$$[(d - \nu_0) * (d - \nu_1), 0; d - \nu_0 - \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$$

である。この曲線は $\sigma = d - \nu_0 \leq d - \nu_1 = e$ かつ $\sigma = d - \nu_0 \geq 2(d - \nu_0 - \nu_1) = 2\nu'_1$ が成り立つ。よってこの曲線 Γ による対 (Σ_b, Γ) は #極小モデルである。また、 P_1 が Δ_∞ にのっている場合も、 $I_{(+)}$ 種基本変換によって各不変量は、

$$b' = b + 1 = 2, \quad \sigma' = \sigma = d - \nu_0$$

$$e' = e + \sigma - \nu_1 = 2d - \nu_0 - \nu_1, \quad \nu'_1 = \sigma - \nu_1 = d - \nu_0 - \nu_1$$

のように変化し、 P_1 が Δ_∞ にのっていない場合と同様に ν'_1 は引き続き最大重複度である。したがってこの変換によってできた曲線 Γ のタイプは、

$$[(d - \nu_0) * (2d - \nu_0 - \nu_1), 2; d - \nu_0 - \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$$

である。 $\sigma = d - \nu_0 \geq 2(d - \nu_0 - \nu_1) = 2\nu'_1$ が成り立つから、この曲線 (Γ' とする) による対 (Σ_b, Γ') も #極小モデルである。

したがって曲線 C が Noether の逆不等式をみたすけれども 1 度のブローアップでは #極小にならないような対 (\mathbb{P}^2, C) についても、上の計算よればさらにもう 1 度 I 種変換をすると #極小モデルが得られることがわかる。すなわち、3 点が 1 直線上に並ぶ問題点に目をつづれば、Noether の逆不等式をみたす曲線 C による対 (\mathbb{P}^2, C) はすべての場合について、#極小モデルに対応していると見てよいのである。

そこで次に Σ_b の理論における重要な不変量 D^2, Z^2 を \mathbb{P}^2 の世界でも考えて \hat{D}^2, \hat{Z}^2 とし、 D^2, Z^2 と \hat{D}^2, \hat{Z}^2 の間の関係を調べよう。

6 \mathbb{P}^2 の世界に Σ_b の理論における D^2 , Z^2 に相当する不変量を導入する

対 (Σ_b, C^*) の最短非特異化を (S, D) とし, 対 (\mathbb{P}^2, C) の最短非特異化を (W, \hat{D}) とする. また, 因子 Z を $Z = D + K_S$ で定義し, これに習って $\hat{Z} = \hat{D} + K_W$ で定義する. (K_S, K_W は S, W における標準因子をあらわす.)

Noether の逆不等式をみたす曲線 C による対 (\mathbb{P}^2, C) が 1 度のブローアップでは # 極小になるときは, 対 (\mathbb{P}^2, C) の最短非特異化はブローアップしてできた対 (Σ_1, C^*) を経由する. すなわち, 対 (\mathbb{P}^2, C) の最短非特異化が (S, D) なら (\mathbb{P}^2, C) をブローアップしてできた対 (Σ_1, C^*) の最短非特異化も (S, D) であり, $D = \hat{D}$, $Z = \hat{Z}$ である. したがってギャップを調べる必要があるのは ‘曲線 C が Noether の逆不等式をみたすけれども 1 度のブローアップでは # 極小にならないような対 (\mathbb{P}^2, C) ’ についてのみである. Σ_b の理論において D^2 は次のように求まる.

Theorem 6.1

Σ_b における曲線 C のタイプが $[\sigma * e, b; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$ であるとき,

$$D^2 = 2\sigma e - b\sigma^2 - \sum_{j=1}^r \nu_j^2 \quad (\nu_j \geq 2)$$

である.

一方 Z^2 は $K_{\Sigma_b} = -2\Delta_\infty - (b+2)F_C$ であることと, 一般に標準因子 K_S は 1 回のブローアップ $\mu: S' \rightarrow S$ で $\mu^*(K_S) + E$ となることから, 次のように求められる.

Theorem 6.2

Σ_b における曲線 C のタイプが $[\sigma * e, b; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$ であるとき,

$$Z^2 = 2(\sigma - 2)(e - b - 2) - b(\sigma - 2)^2 - \sum_{j=1}^r (\nu_j - 1)^2 \quad (\nu_j \geq 2)$$

ここで $(\nu_j \geq 2)$ などとあるのは, Σ の項が特異点の寄与分だからである. すなわち曲線 C ははじめから非特異の場合の自己交点数から, C に特異点があることによるによって増加している交点数を引く項だからである. ν_j が特異点でなければ, ν_j のブローアップによる自己交点数の減少は無い. そこで \mathbb{P}^2 で D^2 と Z^2 に相当する不変量 \hat{D}^2 と \hat{Z}^2 を考える場合もこれに倣って, 曲線 C が非特異の場合から自己交点数の特異点による寄与分を引くことによって定義する.

Definition 6.3

\mathbb{P}^2 内の曲線 C のタイプが $[d; \nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$ であるとき,

$$\hat{D}^2 = d^2 - \sum_{j=1}^r \nu_j^2 \quad (\nu_j \geq 2)$$

$$\hat{Z}^2 = (d - 3)^2 - \sum_{j=1}^r (\nu_j - 1)^2 \quad (\nu_j \geq 2)$$

とする.

定理を用いると、 \mathbb{P}^2 内の曲線 C のタイプが $[d; \nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r]$ であり、ブローアップ後、 $I_{(-)}$ 種基本変換をしてタイプが $[(d - \nu_0) * (d - \nu_1), 0; \nu'_1, \nu'_2, \dots, \nu'_r]$ となったとき、

$$D^2 = 2(d - \nu_0)(d - \nu_1) - \sum_{j=1}^r \nu_j'^2 \quad (\nu_j' \geq 2)$$

$$Z^2 = 2(d - \nu_0 - 2)(d - \nu_1 - 2) - \sum_{j=1}^r (\nu_j' - 1)^2 \quad (\nu_j' \geq 2)$$

となる. ここで ν_2 以降は \mathbb{P}^2 内の曲線 C と # 極小モデルに移した後の曲線 C^{**} との間で変化しないことに注目すると

$$\begin{aligned} D^2 &= 2(d - \nu_0)(d - \nu_1) - \sum_{j=1}^r \nu_j'^2 \quad (\nu_j' \geq 2) \\ &= 2(d - \nu_0)(d - \nu_1) - \nu_1'^2 - \sum_{j=2}^r \nu_j'^2 \quad (\nu_1', \nu_j \geq 2) \\ Z^2 &= 2(d - \nu_0 - 2)(d - \nu_1 - 2) - \sum_{j=1}^r (\nu_j' - 1)^2 \quad (\nu_j' \geq 2) \\ &= 2(d - \nu_0 - 2)(d - \nu_1 - 2) - \nu_1'^2 - \sum_{j=2}^r (\nu_j - 1)^2 \quad (\nu_1', \nu_j \geq 2) \end{aligned}$$

のようにあらわすことができる. ここでもし $\nu_1' = d - \nu_0 - \nu_1$ が特異点であれば

$$\begin{aligned} D^2 &= 2(d - \nu_0)(d - \nu_1) - (d - \nu_0 - \nu_1)^2 - \sum_{j=2}^r \nu_j'^2 \\ &= d^2 - \nu_0^2 - \nu_1^2 - \sum_{j=2}^r \nu_j'^2 \\ &= d^2 - \sum_{j=0}^r \nu_j'^2 = \hat{D}^2 \end{aligned}$$

となって D^2 と \hat{D}^2 は等しい. $\nu_1' = d - \nu_0 - \nu_1 \leq 1$ なら、 $\nu_1'^2$ の項は特異点の寄与分として引いてはならないのであるから、 $D^2 = \hat{D}^2 + 1$ である.

また、例外的に P_1 が Δ_∞ のに依りて $I_{(+)}$ 種基本変換が必要な場合は、タイプが $[(d - \nu_0) * (2d - \nu_0 - \nu_1), 2; \nu'_1, \nu'_2, \dots, \nu'_r]$ となるが、この場合も $I_{(-)}$ 種基本変換の場合とまったく同じとなる.

同様の計算で Z^2 と \hat{Z}^2 は一致することがわかり、次の定理を得る.

Theorem 6.4 (D^2 , Z^2 と \hat{D}^2 , \hat{Z}^2 の関係)

(1) $d - \nu_0 - \nu_1 = 1$ の場合のみ $D^2 = \hat{D}^2 + 1$ である. それ以外は $D^2 = \hat{D}^2$ である.

(2) $Z^2 = \hat{Z}^2$ である.

7 Noetherの逆不等式をみたす曲線をリストアップし、 g, D^2, Z^2 を計算するプログラム

次に、プログラミングによって \mathbb{P}^2 内で Noether の逆不等式をみたす曲線のタイプの可能性を調べ、前節の定理を用いてそれぞれのタイプについての D^2 と Z^2 を計算する。また、曲線の種数 g も計算させる。プログラミング言語には C 言語を用いる。目的のデータを得るために、Noether の逆不等式をみたす $\nu_0 \geq \nu_1 \geq \nu_2$ の組をリストアップし、 ν_2 以降の ν_j を辞書式にインクリメントすることにより、 $\nu_2 \geq \nu_3 \geq \dots \geq \nu_r$ となるすべての可能性を調べる。ところが、辞書式にインクリメントするための、添え字 j についてのループの戻り位置が変化してしまうため通常のループ文が使いつらい。そこで関数の再帰呼び出しを用いてこれを解決する。C 言語における関数の再帰呼び出しはスタックメモリを消費する。文法的な誤りが無くてもスタックメモリを使い果たした時点でプログラムは止まってしまう。そこでコンパイル時にスタックメモリを多く確保するオプション `</F スタックのサイズ>` を用いる。スタックメモリの拡張の限界はハードウェアに依存するが、 $d \leq 20$ についてデータを得ることが出来た。以下がプログラムのソースである。

```
#include<stdio.h>
#define MAX 171//次数から計算した特異点の数の最大可能性、すべて 2 重点で  $g=0$  の場合が最大で、仮想種数  $P_i(C)$  で抑えられる
void paint(int start, int paint, int nu[]);
void printType(FILE *fp,int d, int nu[]);//決定した曲線のタイプを表示
int backTrack(int nu[]);//バックトラック (スタート位置を返す)
void otherSingulars(FILE *fp,int d,int start, int nu[]);//最初の 3 つ以外のすべての可能性を付け加えて曲線のタイプを決定して  $g \geq 0$  なら表示
int culcuate_g(int d, int nu[]);//種数  $g$  を計算
int culcuate_zz(int d, int nu[]);// $Z^2$  を計算
int culcuate_DD(int d, int nu[]);// $D^2$  を計算

int depth;//再帰呼び出し深度監視用バッファ

int main(void){
int i,j,k,l;//カウンタ
int d=3;
int g,zz,DD;
int sigma;//
int nu[MAX];//特異点は最大 MAX 発生するものとする。 $g \geq 0$  が抑止力になる
int nu0,nu1,nu2;//ネーターの不等式判定用バッファ
FILE *fp;
fp=fopen("DDzz_31.csv","w");
if(fp==NULL){
printf("Can't open file DDzz_31.csv");
exit(1);
```



```

}

while(d<=20){//次数の制限

for(nu0=2;nu0<=d-2;nu0++){
for(nu1=1;nu1<=nu0;nu1++){
for(nu2=1;nu2<=nu1;nu2++){
if(d>=nu0+nu1+nu2){
nu[0]=nu0,nu[1]=nu1,nu[2]=nu2;
for(i=3;i<MAX;i++){//まず残り全部が重複度 1 として表示
nu[i]=1;
}
//printType(d,nu);//まず残り全部が重複度 1 として表示
g=culculate_g(d,nu);//残り全部が 1 のときの種数を計算、残りが 1 なら g<0 は心配なし
zz=culculate_zz(d,nu);
DD=culculate_DD(d,nu);

if(g>=0){//種数 0 以上の場合のみ
printf("d = %d, depth=%d, g=%d, z^2=%d, D^2=%d\n",d,depth,g,zz,DD);//種数,Z^2,D^2
を表示、深度を表示

fprintf(fp,"%d,%d,%d,",g,DD,zz);//種数 g をエクセルファイルの A コラム、D^2 を B コラ
ム、Z^2 を C コラムに記録
printType(fp,d,nu);//曲線のタイプをファイルに記録する関数を呼び出し、ファイルの D コ
ラムに記録する
}

if(nu[2]>1){//nu[2] が特異点でなければ次へ行ってっよい
depth=0;
otherSingulars(fp,d,3,nu);
}

}
}
}

d++;
printf("now d = %d\n",d);//進捗状況を d で表示
}
fclose(fp);
return 0;

```

```

}

void printType(FILE *fp,int d,int nu[]){//曲線のタイプをファイルに記録する関数
int i;
fprintf(fp,"[%d;%d %d %d",d,nu[0],nu[1],nu[2]);//タイプ記録始め
for(i=3;i<MAX;i++){
if(nu[i]==1) break;//1 はファイルに書き込まない,1 になったらループ脱出
fprintf(fp," %d",nu[i]);
}
    fprintf(fp,"]\n");//タイプ記録終了
}

void otherSingulars(FILE *fp, int d,int start,int nu[]){//nu[0]nu[1]nu[2] 以外の
特異点を辞書式にインクリメントしながら printType 関数を呼び出す
int i;
int g, zz, DD;
int sigma;//
depth++;//再帰呼び出しの深度を監視するバッファ

while(start<MAX){//位置が末尾を過ぎていなければ
nu[start]++;//そこを1つ増やす
g=calculate_g(d,nu);
zz=calculate_zz(d,nu);
DD=calculate_DD(d,nu);

if(g>=0){//種数0 以上の場合のみデータ保存

printf("d = %d, depth=%d, g=%d, z^2=%d, D^2=%d\n",d,depth,g,zz,DD);//種数を表示、
深度を表示
fprintf(fp,"%d,%d,%d",g,DD,zz);
printType(fp,d,nu);//タイプの表示
break;//次の nu を増やしても種数は減ってしまうから,ここでwhileループを脱出する
}

start++;//つぎの nu[i] へ
}

start=backTrack(nu);//最後まで行ったらバックトラックしてどこまで一致しているか問
い合わせ、結果を start に

if(start>2){//nu[2] まで一致していなければ続行

```

```

for(i=start+1;i<MAX;i++){//まずスタート位置の1つ先から1にリセット
nu[i]=1;
}
otherSingulars(fp,d,start,nu);//再帰呼び出し
}
//nu[2] まで一致したら脱出し、次の nu[0]nu[1]nu[2] へ

```

```

}

```

```

int backTrack(int nu[]){//添え字 i によりバックトラックし、どこまで遡ってインクリメントすればよいかを探す
int i;//カウンタ
int start;//バックトラックするスタート位置
for(i=MAX-1;i>=2;i--){//最後から1つずつ比較
start=i;
if(nu[i]!=nu[i-1]) break;
}
return start;
}

```

```

int culcuate_g(int d, int nu[]){//種数 g を計算
int sum=0;//Sigma 計算用バッファ
int i;//カウンタ
int g;//種数
for(i=0;i<MAX;i++){
if(nu[i]==1) break;//特異点の寄与分のみ引き算する
sum=sum+nu[i]*(nu[i]-1)/2;
}
g=(d-1)*(d-2)/2-sum;
return g;
}

```

```

int culcuate_zz(int d, int nu[]){//Z^2 は Zhat^2 と同じで良い
int zz;//Z^2 用バッファ
int sum=0;// 計算用バッファ
int i;//カウンタ
for(i=0;i<MAX;i++){
if(nu[i]==1) break;//特異点の寄与分のみ引き算する
sum=sum+(nu[i]-1)*(nu[i]-1);
}
zz=(d-3)*(d-3)-sum;

```

```

return zz;
}

int culcuate_DD(int d, int nu[]){//d-nu0-nu1=1 のとき以外、 $D^2$  は  $\text{Dhat}^2$  で良い
int DD;// $D^2$ 
int sum=0;//sigma 計算用バッファ
int i;//カウンタ
for(i=0;i<MAX;i++){
if(nu[i]==1) break;//特異点の寄与分のみ引き算する
sum=sum+nu[i]*nu[i];
}
DD=d*d-sum;
if(d-nu[0]-nu[1]==1){//d-nu0-nu1=1 のとき、定理より  $D^2=\text{Dhat}^2+1$  である
DD++;
}
return DD;
}

```

8 データのサンプル

データの一部を末尾に添付する. $g = 0, -15 \leq D^2 \leq -5$ に制限してある.

9 データの視覚化

プログラミングによって得たデータをもとに、いくつか不変量同士の関係を視覚化した.
 ここで $\alpha := 4g - 4 - D^2$ 、 $A := Z^2 - g + 1$ 、 $\omega := 3g - 3 - D^2$ 、 $\Omega := 3Z^2 - 4g + 4$ とおいた.

	x 軸	y 軸	条件
figure_1	D^2	Z^2	$\sigma \geq 6$
figure_2	D^2	Z^2	$\sigma \geq 4$
figure_3	α	A	$\sigma \geq 6$
figure_4	α	A	$\sigma \geq 4$
figure_5	ω	Ω	$\sigma \geq 6$
figure_6	ω	Ω	$\sigma \geq 4$

グラフは不変量 σ の値によって、おおむね次のように色分けされている. $\sigma = 4$ を赤とし、 $\sigma = 18$ までに色相環を 1 周するように設定してある.

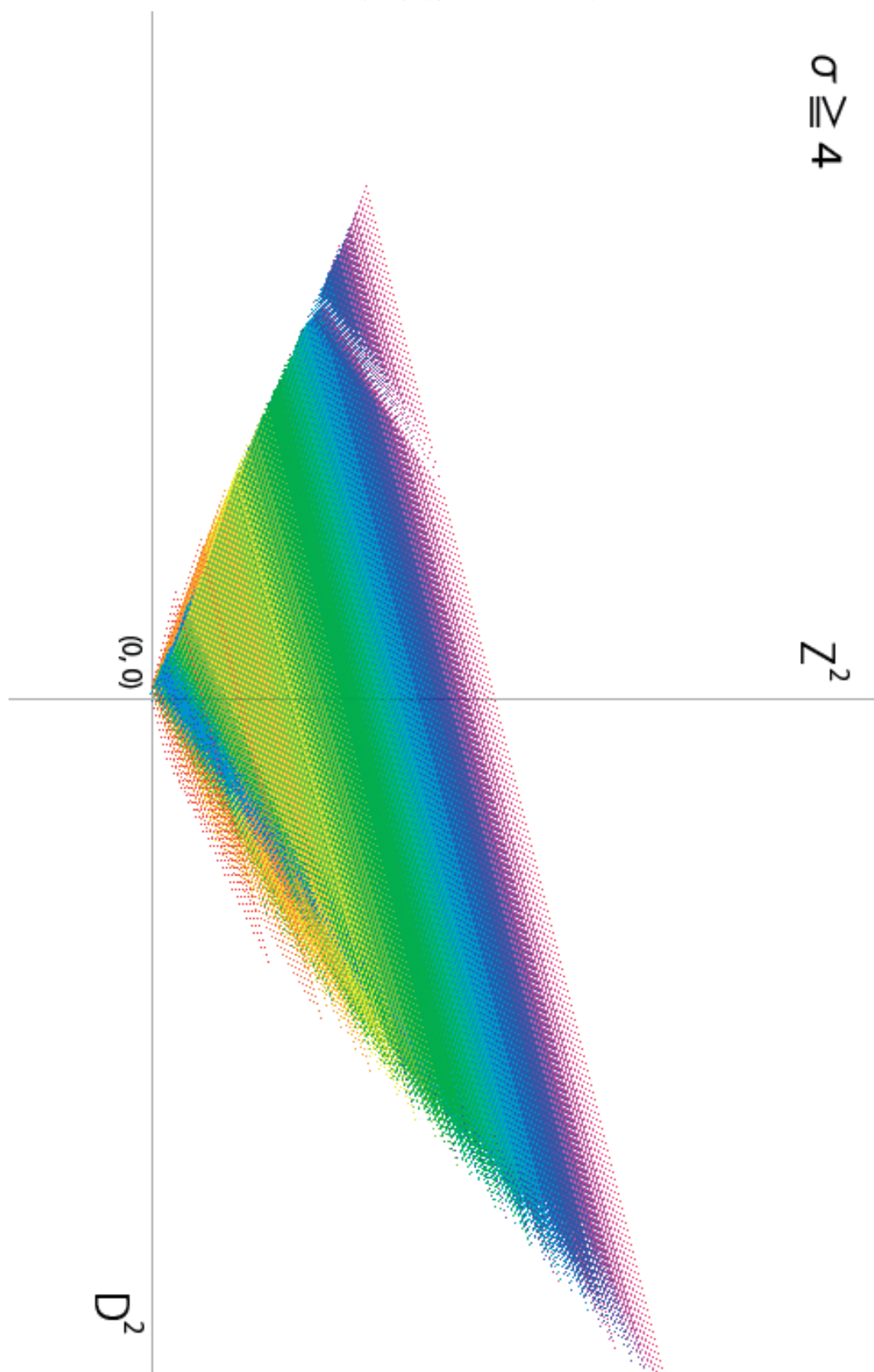
σ の値	RGB16 進カラー
4	ff0000
5	ff6600
6	ffaa00
7	ffff00
8	99ff00
9	00ff00
10	00ff66
11	00ffcc
12	0099ff
13	0033ff
14	3300ff
15	9900ff
16	ff00ff
17	ff0077
18	ff0033

グラフ上の同じ座標位置に曲線のタイプが複数存在する場合、あとからピックアップされたタイプの σ の値によって上書きプロットされてしまうためこの色分けは完全とは言えないが、 σ の分布のだいたいの様子はつかむことができる。

参考文献

- [1] 飯高 茂, 平面曲線の幾何, 共立出版, 2001.
- [2] 河田敬義先生 1 年祭記念数学シンポジウム, 1995.



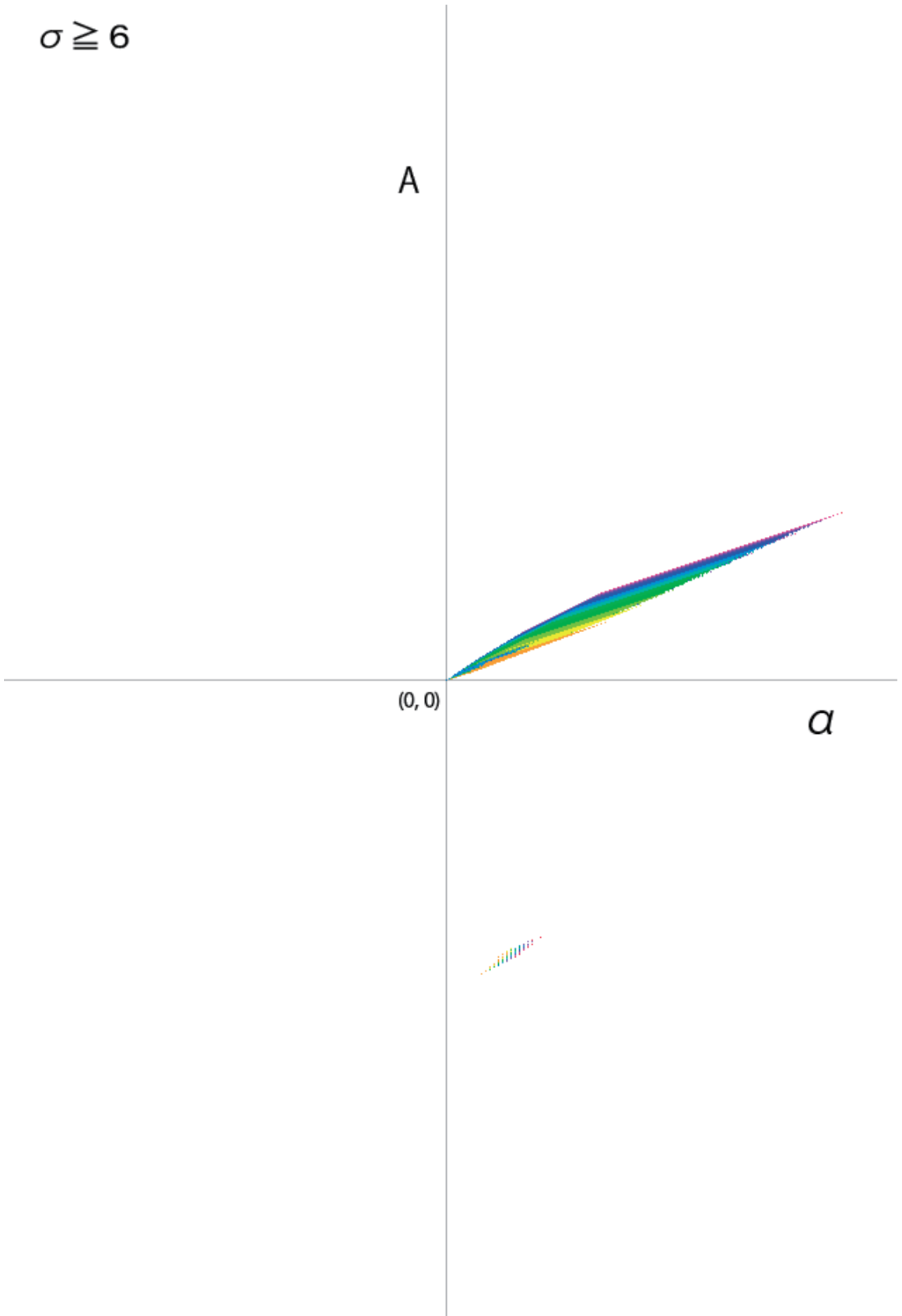


$$\sigma \geq 6$$

A

(0, 0)

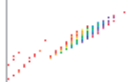
a



$$\sigma \geq 4$$

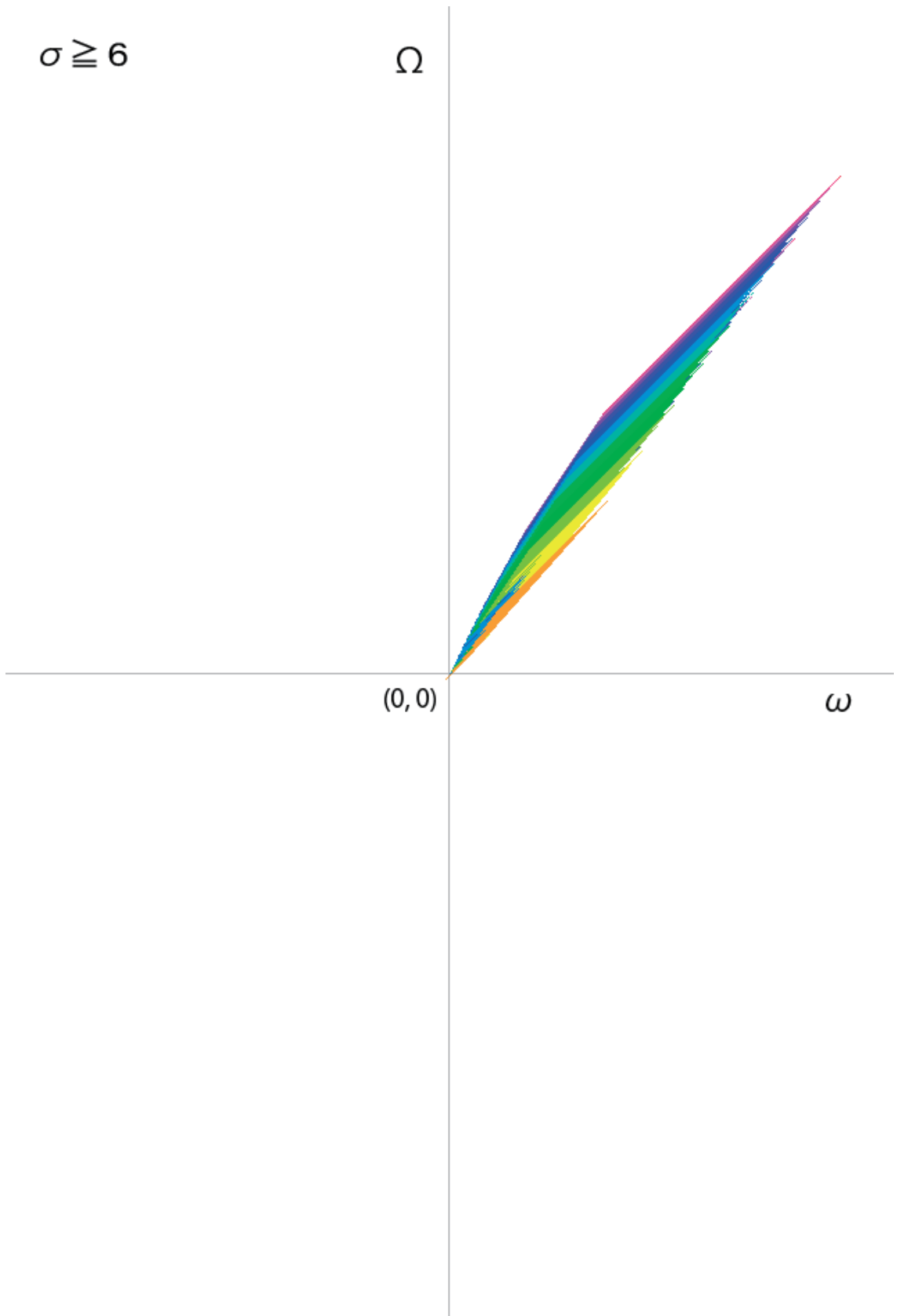
A

(0, 0)

 a 

$$\sigma \geq 6$$

Ω



$$\sigma \geq 4$$

